Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date : Lundi 2 Juin 2014	Heure : 8 H	Durée : 4 heures	Nb pages : 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

N.B. Le sujet comporte deux problèmes, totalement indépendants.

Problème I

Partie I

Dans cette partie, on s'intéresse à calculer *l'intégrale de Gauss* définie par :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si, $x \geq 0$. On pose, alors,
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}dt, \quad x \geq 0.$$
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que $f(0) = \pi$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$.
6. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle
$$y' - y = -\frac{\alpha}{\sqrt{x}}, \tag{1}$$
où $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du.$
7. Résoudre l'équation différentielle (1) (*On donnera une solution particulière sous forme intégrale*).
8. En déduire que :
$$\forall\, x \geq 0, \quad e^{-x}f(x) = \pi - \alpha \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$$
9. Déterminer alors la valeur de α et déduire que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie II

On pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Justifier l'existence de I_n et calculer I_0.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\mapsto +\infty} I_n = 0$.
3. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n I_n$ est convergente et calculer sa somme.
4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} I_n$ est divergente.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$
6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sqrt{n+1}\, I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+\frac{t^2}{n+1})^{n+1}}.$$
8. Pour $t > 0$ fixé, étudier les variations de la fonction : $x \longmapsto x \ln\left(1+\dfrac{t^2}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(1+\frac{t^2}{n+1}\right)^{-n-1} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$
9. Montrer alors que :
$$\lim_{n\mapsto +\infty} \sqrt{n+1}\, I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
10. En déduire *la formule de Wallis* :
$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\mapsto +\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Partie III

On pose, pour tout entier non nul n,

$$u_n = (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n - \ln(n!).$$

1. Montrer que :
$$u_n - u_{n-1} \underset{n\mapsto +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}. \tag{3}$$
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Montrer que $n! \underset{n\mapsto +\infty}{\sim} e^{-\ell}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$.
4. En utilisant la formule de Wallis (2), montrer que $\ell = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.
5. En déduire *la formule de Stirling* :
$$n! \underset{n\mapsto +\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}. \tag{4}$$

6. En utilisant l'équivalence donnée par la formule (3), et en remarquant que $\frac{1}{n^2} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, montrer que :

$$\ln(\sqrt{2\pi}) + u_n \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n}.$$

7. En déduire la formule asymptotique :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})\right).$$

Problème II

Partie I

On considère les fonctions :

$$\zeta \,:\,]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad F \,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad\qquad x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et exprimer ses dérivées successives comme sommes de séries de fonctions.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \zeta(x) = 1$.
3. Montrer que $\theta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est bien définie sur $]0,+\infty[$ et que :
$$\forall x > 1, \quad \theta(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x).$$
4. Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{F(x)}$ s'écrit, sur $\mathbb{R}$, comme somme d'une série entière.
5. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère le *k-ième nombre de Bernoulli* défini par :

$$b_k = F^{(k)}(0),$$

où $F^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de F, avec la convention $F^{(0)} = F$.

1. Vérifier que $b_0 = 1$ et que $b_1 = -\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la fonction $G : x \longmapsto F(x) + \frac{1}{2}x$ est paire sur $\mathbb{R}$ et déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_{2k+1} = 0.$$
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. En dérivant n-fois la formule :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x - 1)F(x) = x,$$
montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k b_{n-k} = 0, \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
4. Calculer b_2 et b_4.

5. Pour n$\in \mathbb{N}$, on pose
$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} X^k.$$
   (a) Calculer $B_0(X)$, $B_1(X)$, $B_2(X)$ et $B_3(X)$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $B_n(0) = b_n = B_n(1)$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $B'_{n+1}(X) = (n+1)B_n(X)$.
   (d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.

Partie III

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction 1-périodique $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que,
$$\forall t \in [0,1[, \quad \varphi_n(t) = B_n(t).$$
Pour $p \in \mathbb{Z}$, on note $c_p(\varphi_n) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(t)\, e^{-2i\pi pt} dt$, le coefficient de Fourier exponentiel de φ_n d'indice p.

1. Montrer que φ_n est continue et est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. Que peut-on dire de la série de Fourier de φ_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $c_0(\varphi_n) = 0$.
   (b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$,
$$c_p(\varphi_{n+1}) = \frac{n+1}{2ip\pi} c_p(\varphi_n).$$
   (c) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$,
$$c_p(\varphi_n) = \frac{-n!}{(2ip\pi)^n}.$$
   (d) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$,
$$B_{2n}(t) = 2(-1)^{n+1}(2n)! \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi pt)}{(2\pi p)^{2n}}.$$
   (e) En déduire que :
$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n).$$
4. Donner les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$. En déduire les valeurs des sommes
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$
5. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n$ est égal à 2π.
6. Montrer que, pour tout $x \in]-2\pi, 2\pi[$,
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \right) = 1.$$
7. En déduire que F est développable en série en 0 et que pour tout $x \in]-2\pi, 2\pi[$,
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$